Concursul Interjudețean de Matematică „PRIN LABIRINTUL MATEMATICII”

Ediția a XIX-a, Baia Mare, 14 noiembrie 2026

BAREM DE CORECTARE, CLASA A VIII-A

Subiectul 1. Determinați perechile de numere reale (x, y), cu $x+2y\neq 0$, pentru care

$$\begin{cases} 4x+\dfrac{2x-2\cdot(3-2y)+7}{x+2y}=3-2y \\ 4y+\dfrac{32y-2\cdot(13-8x)+27}{2(x+2y)}=13-8x \end{cases}.$$

Andrei Horvat-Marc

Soluție: Metoda I. Oficiu. ..... 1 p

Sistemul devine: $\begin{cases} 2(2x+y)+\dfrac{1}{x+2y}=1 \\ 4(2x+y)+\dfrac{1}{2(x+2y)}=5 \end{cases}$. ..... 2 p

Cu notațiile $a=2x+y$ și $b=\dfrac{1}{x+2y}$, rezultă $\begin{cases} 2a+b=1 \\ 8a+b=10 \end{cases}$, deci $\begin{cases} a=\dfrac{3}{2} \\ b=-2 \end{cases}$. ..... 4 p

Obținem $\begin{cases} 2x+y=\dfrac{3}{2} \\ x+2y=-\dfrac{1}{2} \end{cases}$, deci $\begin{cases} x=\dfrac{7}{6} \\ y=-\dfrac{5}{6} \end{cases}$. ..... 2 p

Cum $x+2y=\dfrac{7}{6}+2\cdot\left(-\dfrac{5}{6}\right)=-\dfrac{1}{2}\neq 0$, rezultă soluția $(x, y)=\left(\dfrac{7}{6},-\dfrac{5}{6}\right)$. ..... 1 p

Metoda a II-a. Oficiu. ..... 1 p

Sistemul devine: $\begin{cases} 4x^2+4y^2+10xy-x-2y+1=0 \\ 16x^2+16y^2+40xy-10x-20y+1=0 \end{cases}$. ..... 2 p

Înmulțind prima ecuație cu 4 și scăzând din ea a doua ecuație, rezultă $6x+12y+3=0$, deci $x=-2y-\dfrac{1}{2}$. ..... 3 p

Înlocuind $x=-2y-\dfrac{1}{2}$ în prima ecuație, obținem $y=-\dfrac{5}{6}$, deci $x=-2\cdot\left(-\dfrac{5}{6}\right)-\dfrac{1}{2}=\dfrac{7}{6}$. ..... 2 p

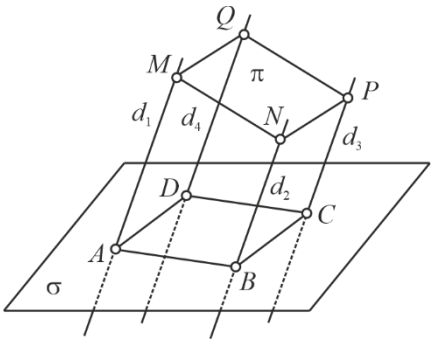
Se verifică efectiv faptul că perechea $(x, y)=\left(\dfrac{7}{6},-\dfrac{5}{6}\right)$ este soluție a celei de a doua ecuații. ..... 1 p

Cum $x+2y=\dfrac{7}{6}+2\cdot\left(-\dfrac{5}{6}\right)=-\dfrac{1}{2}\neq 0$, rezultă soluția $(x, y)=\left(\dfrac{7}{6},-\dfrac{5}{6}\right)$. ..... 1 p

Subiectul 2. Demonstrați că dacă patru drepte paralele determină, pe un plan dat, vârfurile unui paralelogram, atunci ele determină vârfurile unui paralelogram, pe orice plan care le intersectează.

S:E26.259 Suplimentul Gazetei Matematice nr. 9/2026

Soluție:



Oficiu. ..... 1 p

Fie dreptele paralele d_1, d_2, d_3, d_4 care determină pe planul σ paralelogramul $ABCD$, cu $A \in d_1$, $B \in d_2$, $C \in d_3$ și $D \in d_4$. Notăm $\alpha = (d_1, d_2)$, $\beta = (d_2, d_3)$, $\gamma = (d_3, d_4)$, $\delta = (d_4, d_1)$ și alegem planul π, cu $\pi \cap d_1 = \{M\}$, $\pi \cap d_2 = \{N\}$, $\pi \cap d_3 = \{P\}$ și $\pi \cap d_4 = \{Q\}$.

Cum $d_1 \| d_4$ și $AB \| DC$, iar $AB \cap d_1 = \{A\}$, rezultă că $\alpha \| \gamma$. ..... 3 p

Analog obținem că $\beta \| \delta$. ..... 2 p

Deoarece $\alpha \| \gamma$, $\pi \cap \alpha = MN$ și $\pi \cap \gamma = PQ$, rezultă că $MN \| PQ$. ..... 2 p

Deoarece $\beta \| \delta$, $\pi \cap \beta = NP$ și $\pi \cap \delta = MQ$, rezultă că $NP \| MQ$. C

Cum $MN \| PQ$, deducem că patrulaterul $MNPQ$ este paralelogram. ..... 2 p

Proiect realizat cu sprijinul financiar al Consiliului Județean Maramureș

Subiectul 3. Se consideră ecuația $\left[2\{x+y\}\right]=2\{x\}+2\{y\}$, cu $x, y\in\mathbb{R}\setminus\mathbb{Z}$.

a) Dați un exemplu de soluție (x, y) a ecuației, cu $x\neq y$.

b) Demonstrați că dacă perechea (x, y) este o soluție a ecuației, atunci $\max\{\{x\},\{y\},\{x+y\}\}=\frac{1}{2}$.

c) Dacă perechile (x_1, y_1), $(x_2, y_2),\ldots,(x_{2026}, y_{2026})$ sunt soluții ale ecuației, atunci demonstrați că:

$$x_1+x_2+\ldots+x_{2026}+y_1+y_2+\ldots+y_{2026}\in\mathbb{Z}.$$

(Notațiile $[a]$ și $\{a\}$ reprezintă partea întreagă, respectiv partea fracționară a numărului real a.)

Dana Heuberger

Soluție: Oficiu. ..... 1 p

a) O soluție este $(x, y)=\left(\frac{1}{4},\frac{5}{4}\right)$. ..... 2 p

b) Metoda I. Deoarece $\{x\},\{y\}\in(0,1)$, rezultă că $\{x+y\}\in(0,1)$. ..... 1 p

Notăm $\{x\}=a$ și $\{x+y\}=f$.

$\{y\}=\{x+y-x\}=\{[x+y]+\{x+y\}-[x]-\{x\}\}=\{\{x+y\}-\{x\}\}=\{f-a\}$. ..... 2 p

Ecuația devine: $[2f]=2a+2\cdot\{f-a\}$. Adunăm în ambii membri $2\cdot[f-a]$ și obținem:

$[2f]+2\cdot[f-a]=2a+2\cdot(f-a)=2f$, așadar $2f\in\mathbb{Z}\cap(0,2)$, deci $2f=1$. Prin urmare $\{x+y\}=\frac{1}{2}$. ..... 1 p

Înlocuind în ecuația inițială, rezultă că $\{x\}+\{y\}=\frac{1}{2}$, prin urmare $\{x\},\{y\}\in\left(0,\frac{1}{2}\right)$ și obținem concluzia.. ..... 1 p

Metoda a II-a. Dacă $x, y\in\mathbb{R}\setminus\mathbb{Z}$, atunci $\left[2\{x+y\}\right]=2\{x\}+2\{y\}>0$ ..... 1 p

Mai mult, $2\{x+y\}\in(0,2)$, deci $\left[2\{x+y\}\right]\in\{0,1\}$. Așadar $\left[2\{x+y\}\right]=1$. ..... 1 p

Înlocuind în ecuația inițială, rezultă că $\{x\}+\{y\}=\frac{1}{2}$, prin urmare $\{x\},\{y\}\in\left(0,\frac{1}{2}\right)$. ..... 1 p

Dar $\{x+y\}=\{x\}+\{y\}-k=\frac{1}{2}-k$, cu $k\in\{0,1\}$. Pentru $k=1$, obținem $\{x+y\}=-\frac{1}{2}$, fals, iar pentru $k=0$, obținem $\{x+y\}=\frac{1}{2}$ și rezultă concluzia. ..... 2 p

c) Folosind **b)**, obținem $\{x_1\}+\{y_1\}=\{x_2\}+\{y_2\}=\ldots=\{x_{2026}\}+\{y_{2026}\}=\frac{1}{2}$. ..... 1 p

$x_1+x_2+\ldots+x_{2026}+y_1+y_2+\ldots+y_{2026}=[x_1]+[x_2]+\ldots+[x_{2026}]+[y_1]+[y_2]+\ldots+[y_{2026}]+1013\in\mathbb{Z}$. ..... 1 p

Subiectul 4. Fie cubul $ABCDA'B'C'D'$ cu $AB=12$ cm. Alegem punctele E, F, G pe muchiile BB', CC', respectiv DD', astfel încât $BE=3$ cm și $CF=DG=6$ cm. Notăm $EF\cap BC=\{M\}$, $A'F\cap AC=\{N\}$, $A'G\cap AD=\{P\}$, $EG\cap BD=\{Q\}$ și $MN\cap PQ=\{X\}$.

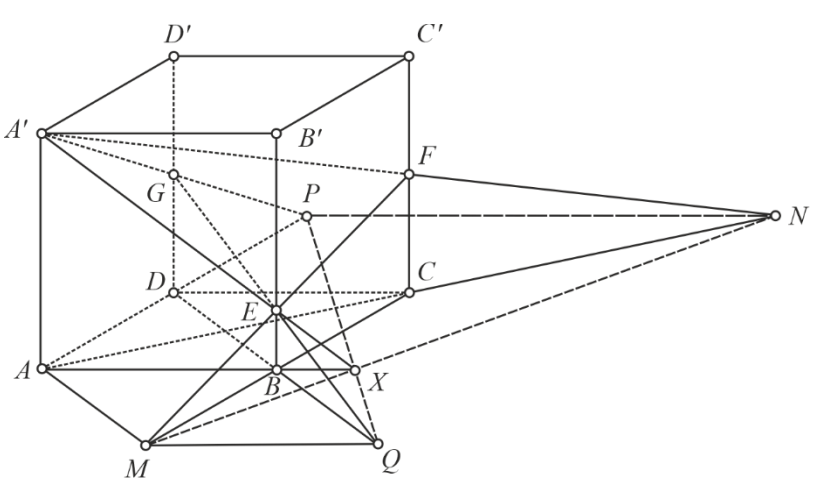
a) Demonstrați că $X\in AB$.

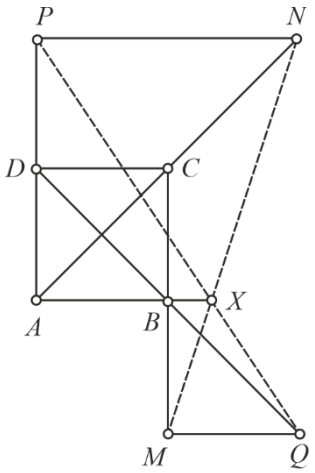
b) Determinați măsura unghiului CMQ.

c) Determinați valoarea raportului $\frac{XM}{XN}$.

Dana Heuberger

Soluție:





Oficiu. ..... 1 p

a) $(A'EF)\cap(ABC)=MN$ și $(A'EG)\cap(ABC)=PQ$. ..... 1 p

Deoarece $\{X\}=MN\cap PQ$, obținem că $X\in(A'EF)\cap(A'EG)=A'E$. ..... 1 p

Cum $A'E\subset(ABB'A')$ și $X\in(ABC)$, rezultă că $X\in(ABB'A')\cap(ABC)=AB$ ..... 1 p

b) $\Delta MBE\sim\Delta MCF$ (T.f.a.), deci $\frac{MB}{MC}=\frac{BE}{CF}=\frac{1}{2}$, așadar $BM=BC=12$ cm. ..... 1 p

$\Delta QBE\sim\Delta QDG$ (T.f.a.), deci $\frac{QB}{QD}=\frac{BE}{DG}=\frac{1}{2}$, așadar $BQ=BD=12\sqrt{2}$ cm. ..... 1 p

$\Delta BCD\equiv\Delta BMQ$ (L.U.L.), deci $CMQ=BMQ=BCD=90°$. ..... 1 p

c) $\Delta GDP\equiv\Delta GD'A'$ (C.U.), deci $DP=A'D'=AD=12$ cm. Din $\Delta NCF\sim\Delta NAA'$ (T.f.a.), obținem $CN=AC$.

Deoarece DC este linie mijlocie în triunghiul APN, rezultă că $PN=2DC=24$ cm și $APN=90°$. ..... 1 p

Avem $NP\perp AD$, deci $NP\perp BC$ și cum $MQ\perp BC$, obținem $MQ\parallel NP$. ..... 1 p

Prin urmare, X este intersecția diagonalelor trapezului $MQNP$.

Cum $MQ=AB=12$ cm, deducem că $\frac{XM}{XN}=\frac{MQ}{PN}=\frac{1}{2}$. ..... 1 p